



# Peut-on travailler sur les données "approximées" en histoire financière ?

Christian Rietsch, Bernard Haudeville

## ► To cite this version:

Christian Rietsch, Bernard Haudeville. Peut-on travailler sur les données "approximées" en histoire financière ?. *Economie et sociétés - Cahiers de l'ISMEA*, 2005, 33, pp.1341-1371. halshs-00009113

**HAL Id: halshs-00009113**

**<https://shs.hal.science/halshs-00009113>**

Submitted on 16 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **PEUT-ON TRAVAILLER SUR DES DONNÉES "APPROXIMÉES"** **EN HISTOIRE FINANCIÈRE ?**

### **Résumé**

Au XIX<sup>e</sup> siècle, les journaux publient, jour après jour, le cours des rentes, puis dans la seconde moitié du siècle, de certaines actions ; à la fin de chaque année, on prend l'habitude d'indiquer à l'épargnant le cours le plus haut et le cours le plus bas pour chaque mois de l'année écoulée. Ces observations ont le grand avantage d'être assez facilement accessibles mais présentent toutefois quelques inconvénients sérieux.

Disposant de ces séries de cours le plus haut et le plus bas, de précision assez douteuse, ainsi que des observations exactes, nous nous sommes interrogés sur l'utilité d'un dépouillement soigneux des données. Il nous est apparu que ce travail gigantesque n'apportait, en dépit de sa rigueur, que des corrections relativement mineures et que les conclusions rejoignaient celles précédemment établies. Il s'ensuit qu'avec une procédure allégée, on pourrait, sans perte réelle en précision, éviter un travail particulièrement lourd de dépouillement.

La démonstration, d'ordre empirique, s'effectue en deux parties. La première utilise l'économétrie classique : la régression simple, la causalité-à-la-Granger et l'analyse de la saisonnalité. La seconde partie utilise d'autres techniques, la cointégration et le modèle à correction d'erreur.

**Mots clés :** rente 3%, cours le plus haut, cours le plus bas, causalité-Granger, cointégration, modèle à correction d'erreur.

## **WHAT ABOUT WORKING WITH APPROXIMATE DATAS IN** **FINANCIAL HISTORY ?**

### **Summary**

During the nineteenth century, newspapers publish, day after day, the quotation of the government bond, then in the second half of the century, some stocks ; at each year end, one takes the habit to indicate to the investor the highest quotation and the lowest for each month of the last year. These observations have the great advantage to be easily accessible but present nevertheless some serious disadvantages.

Having these series of the highest and the lowest quotation, with doubtful precision, as well as the exact observations, we have questioned the usefulness of a careful data counting. It appeared that this gigantic work, in spite of its rigor, brought us relatively minor corrections and that the conclusions rejoined those previously established. That would lead us to conclude that with a light procedure, one could, without real loss in precision, avoid a particularly heavy work of counting.

The demonstration, of empirical order, is undertaken in two steps. The first one makes use of classical econometrics: simple regression, Granger-causality and analysis of the seasonality. The second step uses different techniques, the cointegration and the error correction model.

**Keywords :** government bond, highest quotation, lowest quotation, Granger-causality, cointegration, error correction model

# PEUT-ON TRAVAILER SUR DES DONNÉES "APPROXIMÉES" EN HISTOIRE FINANCIÈRE ?

Bernard HAUDEVILLE \* & Christian RIETSCH \*\*

## Introduction

Au XIX<sup>e</sup> siècle, les journaux publient, jour après jour, le cours des rentes, puis dans la seconde moitié du siècle, de certaines actions remarquables à différents égards (Banque de France, certains chemins de fer, canal de Suez, etc.). A la fin de chaque année, on prend l'habitude d'indiquer à l'épargnant le parcours de ces titres et pour cela de publier le cours le plus haut et le cours le plus bas pour chaque mois de l'année écoulée (*Almanach financier*, annuel). De tels récapitulatifs sont aussi publiés par les grands auteurs financiers de l'époque, tel Courtois (1855, 1856, 1859, 1861, 1863, 1874, 1877, 1879, 1883) ou Birieux (1857).

Celui qui étudie ces publications aujourd'hui ne peut manquer de ressentir une douloureuse interrogation : quelle est la pertinence de ces observations ? En effet, nous sommes en présence de trois problèmes méthodologiques qui, à première vue, rendent inutilisables ces séries :

- D'abord il s'agit des cours extrêmes, qui incorporent, par leur nature même, toutes les "aberrations" qui se sont produites durant le mois. Fonder une connaissance sur des valeurs qui ne prennent en compte que les éléments exceptionnels et qui ne traduisent que très imparfaitement l'évolution de base d'une série paraît absurde;
- De plus, ces cours sont indiqués avec une imprécision essentielle : on ne connaît pas les dates de leur relevé;
- Accessoirement, les cours extrêmes ainsi observés incluent dans le cas des obligations le coupon couru; comme on ne connaît pas la date du relevé du cours extrême, il est impossible de calculer cet élément d'accumulation afin d'obtenir la donnée pertinente : le cours " nu " ou cours pied-de-coupon. Quatre fois par an, le même phénomène se produit dans le cas des rentes françaises (une ou deux fois par an dans le cas des actions) : le cours le plus bas du mois de distribution risque d'être tout simplement le cours ex-coupon pour les obligations ou bien, dans le cas des actions, un cours ex-dividende ou encore un cours après une opération en capital.

Inversement ces observations présentent un grand avantage : elles sont publiées et assez facilement accessibles; elles évitent le dépouillement fastidieux de la *Cote Officielle*.

La question qui se pose alors est la suivante : ces observations "approximées" peuvent-elles servir à étudier le réel au XIX<sup>e</sup> siècle ou doit-on se mettre à dépouiller systématiquement les archives afin de relever les cours ?

---

\* Université d'Aix-Marseille 3; Bernard.Haudeville@univ.u-3mrs.fr

\*\* Université d'Orléans, Faculté de Droit, d'Économie et de Gestion, LEO, FRE n°2783 du CNRS, Christian.Rietsch@univ-orleans.fr

Le premier grand indice de référence sur la Bourse de Paris, celui de Lenoir, n'hésite pas à utiliser ces cours extrêmes et tire des conclusions rapides à partir de ces éléments fragiles (Lenoir, 1919); d'autres travaux de référence ne nettoient pas les données de l'élément d'accumulation représenté par le coupon couru (Homer & Sylla, 1991). Ce type d'approche est refusé par une école plus récente, en raison de cette méthodologie radicalement fautive, ce qui la conduit systématiquement à relever les cours en les datant, à les "nettoyer" (du facteur d'impureté que constitue le coupon ou les opérations sur titres en ce qui concerne les actions) et à déterminer avec beaucoup de précision un certain nombre d'éléments essentiels à la compréhension de l'histoire économique et boursière <sup>1</sup>.

Il nous est apparu que ce travail gigantesque n'apportait, en dépit de sa rigueur, que des corrections relativement mineures et que les conclusions rejoignaient celles précédemment établies. Cela laisserait entendre qu'avec une procédure allégée, on pourrait, sans perte réelle en précision, éviter un travail particulièrement lourd de dépouillement.

Notre travail se propose d'éclairer cette question à partir d'un exemple précis pour lequel nous disposons d'informations à la fois riches et complètes. L'objectif est donc limité, mais en même temps il revêt une certaine importance pour l'historien pour lequel il peut fournir des repères quant au choix des méthodes appropriées.

Cette orientation conduit à privilégier une approche purement empirique. On pourra objecter que les relations entre nos variables ne seraient pas forcément les mêmes selon qu'on les considère isolément ou que l'on les resitue à l'intérieur d'un cadre théorique qui en précise les éventuelles relations. Ceci est vrai de façon générale pour tout groupe de variables que l'on se propose d'analyser. Dans le cas particulier qui nous occupe ici, les variables statistiques sur lesquelles nous travaillons correspondent à des mesures différentes d'une même variable économique, cours ou taux de rendement et ce problème ne se pose guère.

### **Les données**

Pour montrer l'intérêt de cette approche, nous allons partir de la rente française 3 %, rente qui a été estimée inconvertible (sauf durant quelques années à la fin du siècle) et qui par conséquent n'incluait pas une prime de conversion contrairement aux autres rentes. Nous pouvons utiliser l'important travail de dépouillement et de traitement *fin* effectué par J.-M. Vaslin dans sa thèse précitée par rapport auquel il est possible de confronter les chiffres *hauts* et *bas* publiés par l'*Almanach financier*.

La période d'étude court de 1886 à 1913, soit 28 années complètes ou 336 mois.

---

<sup>1</sup> Par exemple : VASLIN, J.-M., (1999), *Le marché des rentes françaises au XIX<sup>e</sup> siècle et la crédibilité de l'État*, Thèse de doctorat, Orléans; ARBULU, P., (1998), *Le marché parisien des actions au XIX<sup>e</sup> siècle: performance et efficience d'un marché émergent*, Thèse de doctorat, Orléans; VIAENNE, A., (2002), *L'efficience du marché à primes de Paris au XIX<sup>e</sup> siècle*, Thèse de doctorat, Orléans

## Les variables utilisées

Les cours de la rente 3 % publiés dans la thèse de J.-M. Vaslin correspondent aux observations relevées le dernier jour de Bourse de chaque semaine (dans la très grande majorité des cas, le vendredi). Ces relevés incluent le coupon couru et sont indiqués avec la date exacte. De ce fait, le coupon peut aisément être calculé et débité du cours observé afin d'obtenir le cours *nu*. Ensuite, il est possible de déterminer le taux de rendement actuariel de l'opération qui consiste à acheter, au cours du jour du relevé, un titre de rente rapportant 3 FF par an en 4 trimestrialités de 0,75 FF sachant que “ *le coupon se détache en Bourse le 15 des mois de décembre, mars, juillet septembre* ”<sup>1</sup>.

Nous disposons d'autre part des relevés publiés par l'*Almanach financier* pour toutes les années. Les cours relevés indiquent *les plus hauts* et *les plus bas* de chaque mois et incluent le coupon couru. Aucune date n'est précisée quant au cours le plus haut et au cours le plus bas du mois en question. Par convention, on peut émettre l'hypothèse que tant le plus haut que le plus bas sont situés au 15 du mois. De ce fait, les coupons courus sont calculés comme s'ils étaient accumulés jusqu'au 15 du mois.

Les variables sur lesquelles nous allons travailler sont donc :

### **a) Variables “exactes” de J.-M. Vaslin**

Cours observé-coupon couru, à la fin de semaine la plus proche avant le 15 du mois considéré, selon la technique de relevé de J.-M. Vaslin (variable : COURSOBSCPCOURU)

Cours observé nu = *cours observé-coupon couru* moins *coupon couru* sur ce cours (variable : COURSOBSNU)

Taux de rendement actuariel, calculé par itération par J.-M. Vaslin, sur le cours nu de la rente, en tenant compte exactement de la date de l'opération (variable : TXRENDACTU)

### **b) Variables “approximées” à partir de l'*Almanach financier***

Cours le plus bas observé durant le mois, coupon couru, publié dans l'*Almanach financier* des diverses années (variable : PLUSBAS)

Cours le plus élevé observé durant le mois, coupon couru, relevé dans les mêmes conditions (variable : PLUSHAUT)

Cours médian : moyenne entre le cours le plus haut et le plus bas observé durant le mois, coupon couru, soit  
$$\frac{\text{Plus haut} + \text{Plus bas}}{2}$$
 (variable : COURSMEDIAN)

Cours médian nu = *cours médian observé* moins *coupon couru calculé au 15 du mois* (variable : COURSMEDNU)

Taux de rendement courant sur le cours médian nu de la rente, calculé à l'aide du rapport :

$$\frac{3 \text{ FF}}{\text{Cours médian nu}} = \frac{3 \text{ FF}}{\text{Cours médian} - \text{Coupon couru calculé}} \quad (\text{variable : TXRENDCOURSMED})$$

<sup>1</sup> *Almanach financier 1870, Guide des rentiers et capitalistes*, p. 53, Aux bureaux du Journal Financier, PARIS, 1871(et tous les relevés des données publiées année après année)

## **I — Une approche en économétrie classique**

La première idée, et celle qui nous a aiguillés vers cette recherche, est de se demander si le cours observé à la date du 15 du mois considéré (selon les observations de J.-M. Vaslin) peut être inféré à partir des relevés du plus haut et du plus bas de ce mois. Ensuite, si la même opération peut être effectuée sur les cours nus; enfin sur les taux de rendement actuariels.

Dans un premier temps nous utilisons la régression simple à partir des données brutes. On sait depuis les travaux empiriques de Granger et Newbold (1974) et la démonstration analytique de Phillips (1986), prolongeant une remarque déjà faite par I. Fisher dans les années vingt, que cette approche souffre de graves insuffisances méthodologiques et conduit à des résultats qui ont toutes les chances d'être incorrects lorsque l'on travaille sur des variables non stationnaires. Nous donnerons, dans la seconde partie de ce papier, une version plus conforme à ces exigences méthodologiques, mais dans la première partie nous avons souhaité présenter cette approche simple pour plusieurs raisons. Tout d'abord, précisément, elle est simple, facile à comprendre et apporte des réponses conformes à l'intuition. Ne nécessitant qu'une connaissance de base des techniques statistiques, elle est compréhensible par le plus grand nombre. Or, ce papier entend répondre à des problèmes assez fréquents et s'adresse à des chercheurs qui n'ont pas forcément une formation poussée en techniques statistiques. Mais de plus, comme le montrera la seconde partie, les conclusions de l'approche simple ne sont pas remises en cause par une analyse beaucoup plus fouillée et méthodologiquement mieux fondée. De telle sorte que même si la méthode n'est pas bonne, les conclusions ne sont pas fausses.

Dans cette partie, nous allons montrer que les cours médians, coupon couru, les cours médian nus et le taux de rendement apparent sur cours médian nu, sont de bons indicateurs respectivement des cours observés-coupon couru, des cours nus observés et du taux de rendement actuariel.

### **A — Les ajustements économétriques simples**

L'économétrie est représentée par l'ajustement de la relation linéaire simple :

$$y_t = a x_t + b + u_t$$

avec  $y_t$  = la variable "exacte"

$x_t$  = la variable approximée

$u_t$  = le terme d'erreur, supposé suivre une loi normale d'espérance mathématique nulle et de variance constante; on suppose que ces termes d'erreur sont indépendants au cours du temps.

$t$  = le mois considéré

Notre hypothèse de travail est que les deux paramètres calculés doivent avoir les valeurs suivantes :

$b, \hat{\phantom{a}}$  = ordonnée à l'origine = *zéro* (car sinon, l'utilisation de la variable approximée entraînerait un biais systématique dans la prédiction de  $y_t$ )

$a, \hat{\phantom{a}}$  = pente de la régression = *un* (à défaut,  $x_t$  serait un "mauvais" prédicteur (non fiable) de  $y_t$ )

#### **a — Les ajustements obtenus sur les cours coupon couru**

Le cours médian-coupon couru, obtenu selon la technique précédente permet-il de prédire et avec quelle précision le cours observé-coupon couru ? Les résultats économétriques les plus simples sont les suivants :

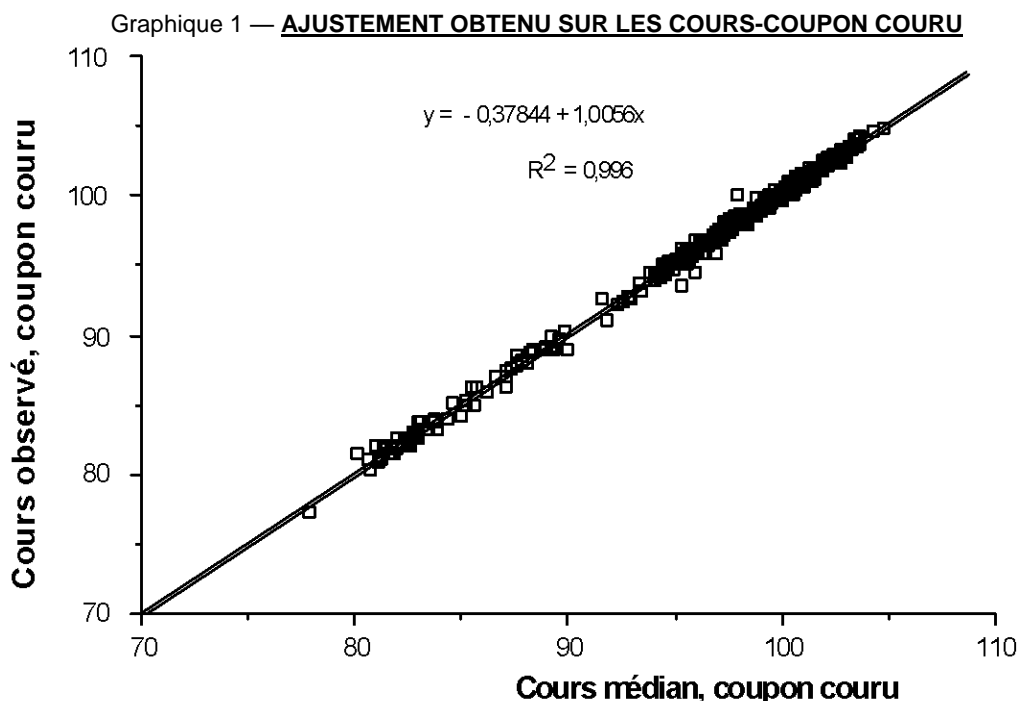
Tableau 1 — Régression 1 — **RÉSULTATS DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LES COURS-COUPON COURU**

Variable expliquée : COURS-COUPON COURU "EXACT"  
 Variable explicative : COURS MEDIAN-COUPON COURU  
 Période : janvier 1886 à décembre 1913 (336 observations)

| Variable                   | Coefficient calculé | Ecart-type | T-statistique |
|----------------------------|---------------------|------------|---------------|
| Pente ( $\hat{a}$ )        | 1.005628            | 0.003298   | 304,9170      |
| Constante ( $b, \hat{b}$ ) | -0.378436           | 0.316697   | -1,194948     |
| R <sup>2</sup>             | 0.996420            |            |               |
| Durbin-Watson              | 2.246804            |            |               |

Au seuil de 5 %, nous vérifions que l'intervalle de confiance recouvre le coefficient de pente de *un* ainsi que l'ordonnée à l'origine *nulle*.

La représentation qui suit illustre que les points du nuage sont bien alignés, avec quelques légères "aberrations":



En pratique, ces résultats économétriques signifient que *pour un cours médian de 100 fr., le cours observé est sous estimé "en moyenne" de 19 centimes : nous sommes donc très près de la valeur prédite.*

La "boîte à outils" des économètres permet d'affiner ce premier résultat. Il est en effet possible d'effectuer une régression en "forçant" un (ou plusieurs) des paramètres à estimer à prendre une valeur donnée (ce que l'on appelle une régression "avec restriction"). Si cette restriction est pertinente, il doit y avoir peu de différence entre une régression avec restriction et une régression sans restriction (ici notre premier ajustement). Cette absence de différence peut être testée à l'aide d'un test qui donne les résultats suivants, selon les contraintes indiquées sous forme d'hypothèse nulle :

Tableau 2 — **TEST SUR LES PARAMÈTRES PRÉCÉDENTS**

Hypothèse nulle: Ordonnée à l'origine = 0

|                     |          |             |          |                      |
|---------------------|----------|-------------|----------|----------------------|
| F-statistique       | 1.427900 | Probabilité | 0.232955 | Restriction acceptée |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 1.427900 | Probabilité | 0.232107 | Restriction acceptée |

Hypothèse nulle: Pente = 1

|                     |          |             |          |                      |
|---------------------|----------|-------------|----------|----------------------|
| F-statistique       | 2.912195 | Probabilité | 0.088842 | Restriction acceptée |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 2.912195 | Probabilité | 0.087912 | Restriction acceptée |

Hypothèse nulle: Ordonnée à l'origine = 0 et Pente = 1

|                     |          |             |          |                     |
|---------------------|----------|-------------|----------|---------------------|
| F-statistique       | 29.95725 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 59.91450 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |

L'hypothèse dite "nulle" est acceptée si la probabilité est supérieure à 5 %; elle est rejetée si la probabilité est inférieure à 5 %

Les résultats de ce "contre-test" sont mitigés. On peut admettre aisément que l'ordonnée à l'origine n'est pas significativement différente de *zéro* et d'autre part que la pente a bien une valeur *unitaire*. Par contre, la double restriction est rejetée, c'est-à-dire que l'on ne peut admettre simultanément que la pente est égale à *un* en même temps que l'ordonnée à l'origine est *nulle*.

### **b — Les ajustements obtenus sur les cours nus**

On rappelle qu'un cours d'obligation est dit *hors coupon*, *pied de coupon* ou *nu*, si le cours observé est débité de l'élément de capitalisation qui s'accumule jour après jour. Le cours médian nu permet-il de prédire et avec quelle précision le cours observé nu ? Les résultats économétriques les plus simples sont les suivants :

Tableau 3 — Régression 2 — **RÉSULTATS DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LES COURS NUS**

Variable expliquée : COURS NU "EXACT"

Variable explicative : COURS MÉDIAN NU

Période : janvier 1886 à décembre 1913 (336 observations)

| Variable                   | Coefficient calculé | Ecart-type | T-statistique |
|----------------------------|---------------------|------------|---------------|
| Pente ( $\hat{a}$ )        | 1.003871            | 0.003298   | 319,8609      |
| Constante ( $b, \hat{b}$ ) | -0.301517           | 0.316697   | -1,003044     |
| R <sup>2</sup>             | 0.996746            |            |               |
| Durbin-Watson              | 2.173137            |            |               |

Au seuil de 5 %, nous vérifions que l'intervalle de confiance recouvre le coefficient de pente de *un* ainsi que l'ordonnée à l'origine *nulle*.

Le résultat est au moins de la même qualité que précédemment et l'on peut admettre assez facilement la pertinence de l'ajustement effectué. En pratique, ce résultat signifie que si le cours médian nu est de 100 fr., le cours nu observé est "en moyenne" à 100,086 fr. : *le cours médian nu sous-estime le cours réel observé d'environ 8,6 centimes*.

Dans les mêmes conditions que précédemment, nous regardons ce qui se passe si nous contraignons les paramètres estimés à prendre certaines valeurs; les résultats aux tests de restrictions sont les suivants :



Tableau 4 — **TEST SUR LES PARAMÈTRES PRÉCÉDENTS**

Hypothèse nulle: Ordonnée à l'origine = 0

|                     |          |             |          |                      |
|---------------------|----------|-------------|----------|----------------------|
| F-statistique       | 1.521316 | Probabilité | 0.218288 | Restriction acceptée |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 1.521316 | Probabilité | 0.217420 | Restriction acceptée |

Hypothèse nulle: Pente = 1

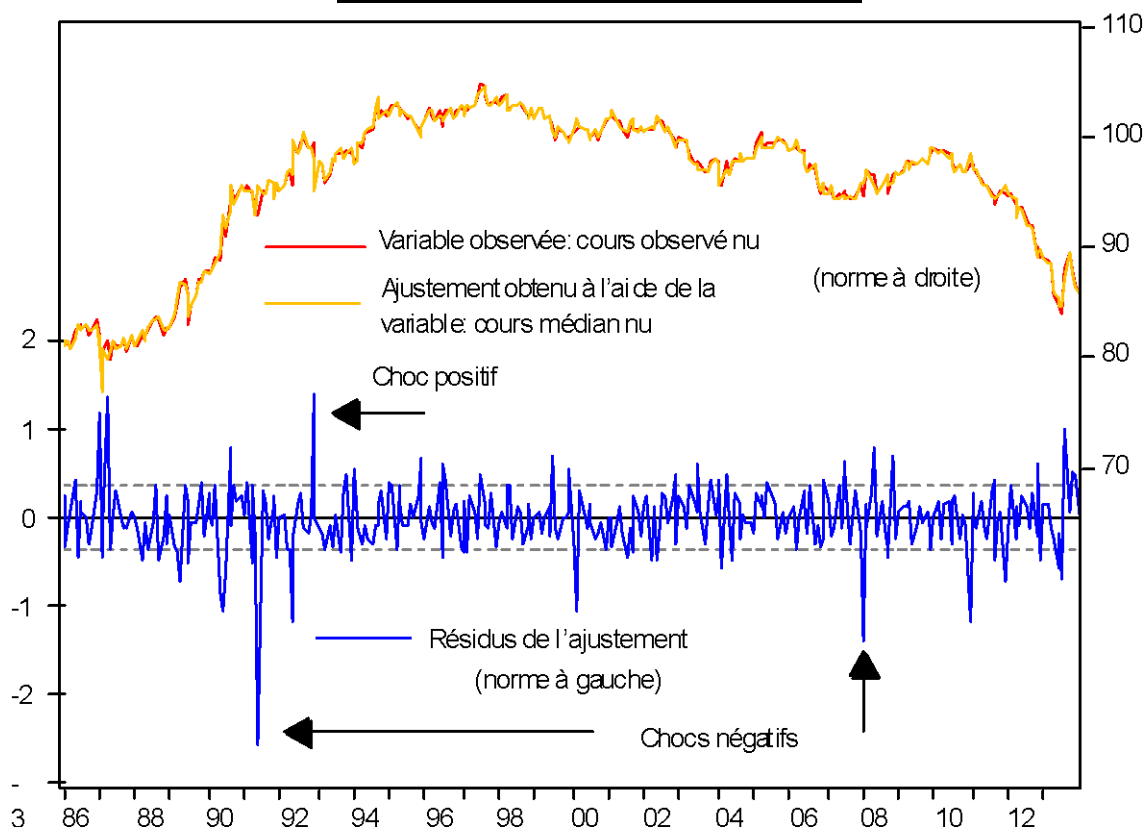
|                     |          |             |          |                      |
|---------------------|----------|-------------|----------|----------------------|
| F-statistique       | 1.006098 | Probabilité | 0.316566 | Restriction acceptée |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 1.006098 | Probabilité | 0.315839 | Restriction acceptée |

Hypothèse nulle: Ordonnée à l'origine = 0 et Pente = 1

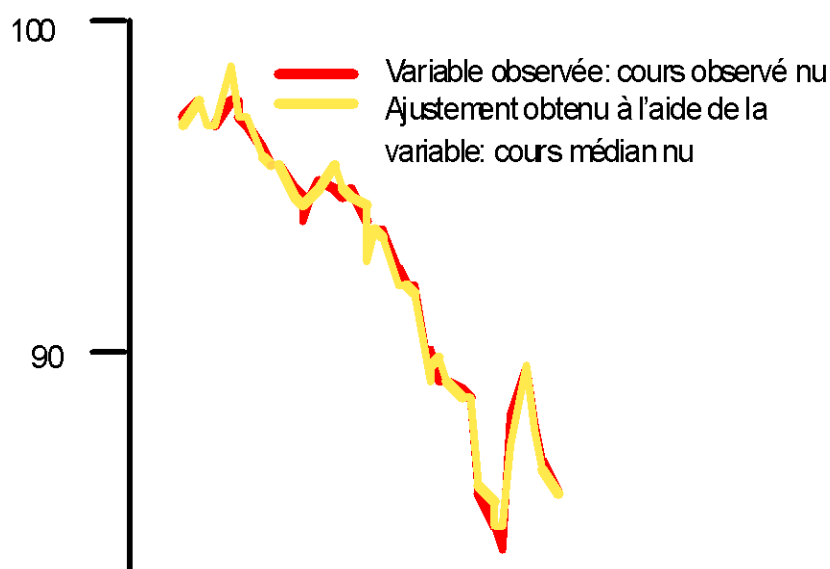
|                     |          |             |          |                     |
|---------------------|----------|-------------|----------|---------------------|
| F-statistique       | 6.449859 | Probabilité | 0.001785 | Restriction rejetée |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 12.89972 | Probabilité | 0.001581 | Restriction rejetée |

La conclusion est tout à fait semblable à celle déjà vue : *on peut poser que l'ordonnée à l'origine est nulle ou, de façon indépendante, que la pente est bien égale à 1, mais on ne peut poser de façon concomitante les deux restrictions.*

La représentation au moyen d'un nuage de points est tout à fait semblable au graphique précédent. A titre d'exemple, nous montrons la chronique des cours médians nu et des valeurs ajustées ainsi que des résidus de l'ajustement (représentés selon une autre norme). Sauf cas exceptionnels (notés sous formes de chocs et traités plus loin), on remarque que les cours médians nus (variable explicative) sont tellement proches des cours observés nus (variable expliquée), que l'on ne peut différencier les deux courbes.

Graphique 2 a — **VALEURS OBSERVÉES, AJUSTÉES ET RÉSIDUS DE L'AJUSTEMENT LINÉAIRE ENTRE COURS MÉDIAN NU ET COURS OBSERVÉ NU**

Graphique 2 b — VALEURS OBSERVÉES ET AJUSTÉES, EN GROS PLAN, POUR LES ANNÉES 1910 A 1913, MONTRANT LA QUASI IMPOSSIBILITÉ DE LES DISTINGUER



Conclusion : Les résultats économétriques sont clairs : *le cours médian nu est un bon indicateur du cours observé nu*. Tout nous indique que le cours médian nu permet de “prédire” très correctement le cours observé nu.

### c — Les ajustements obtenus sur les taux de rendement

Après avoir nettoyé la série observée de l'élément d'accumulation que représente le coupon couru et en prenant en compte la date exacte de l'opération ainsi que celle des détachements de coupons trimestriels, J.-M. Vaslin calcule, au moyen d'une procédure par itérations, le taux de rendement actuariel de la rente. D'un autre côté, en faisant simplement le rapport du revenu annuel de la rente, soit 3 fr., au cours médian nu, défini selon les indications précédentes, nous obtenons une indication très lâche de ce taux, que nous appelons *taux de rendement courant sur cours médian*. Celui-ci, qui comporte *des approximations innombrables*, permet-il de prédire et avec quelle précision le taux de rendement actuariel de la rente calculé avec une très grande précision ? Les résultats économétriques sont les suivants :

Tableau 5 — Régression 3 — RÉSULTATS DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LES TAUX DE RENDEMENT

Variable expliquée : TAUX DE RENDEMENT ACTUARIEL  
 Variable explicative : TAUX DE RENDEMENT COURANT SUR COURS MÉDIAN  
 Période : janvier 1886 à décembre 1913 (336 observations)

| Variable                  | Coefficient calculé | Ecart-type | T-statistique |
|---------------------------|---------------------|------------|---------------|
| Pente ( $\hat{a}$ )       | 1.034865            | 0.003068   | 3037,3411     |
| Constante ( $b, \hat{}$ ) | -0.065339           | 0.009679   | -6,750524     |
| R <sup>2</sup>            | 0.997074            |            |               |
| Durbin-Watson             | 2.119893            |            |               |

Au seuil de 5 %, nous vérifions que l'intervalle de confiance ne recouvre ni le coefficient de pente de *un*, ni l'ordonnée à l'origine *nulle*.

Conclusion : le taux de rendement sur cours médian permet d'expliquer 99,7 % de la variance du taux de rendement actuariel; l'erreur sur ce résultat est particulièrement faible. La valeur des coefficients de l'ajustement est telle que le taux de rendement sur cours médian sous-estime le taux de rendement actuariel d'environ 4 à 5 points de base (nous sommes donc dans une erreur relative inférieure à 2%) dans la zone des taux actuariels de 3 à 4 %. Les paramètres de pente et de l'ordonnée à l'origine sont différents des valeurs attendues. La

qualité de la relation est ici moins bonne, sans doute en raison de l'accumulation des erreurs dues aux différentes approximations faites dans le calcul du taux de rendement calculé sur le cours médian.

Ces résultats sont bien confirmés par le test de restriction:

Tableau 6 — **TEST SUR LES PARAMÈTRES PRÉCÉDENTS**

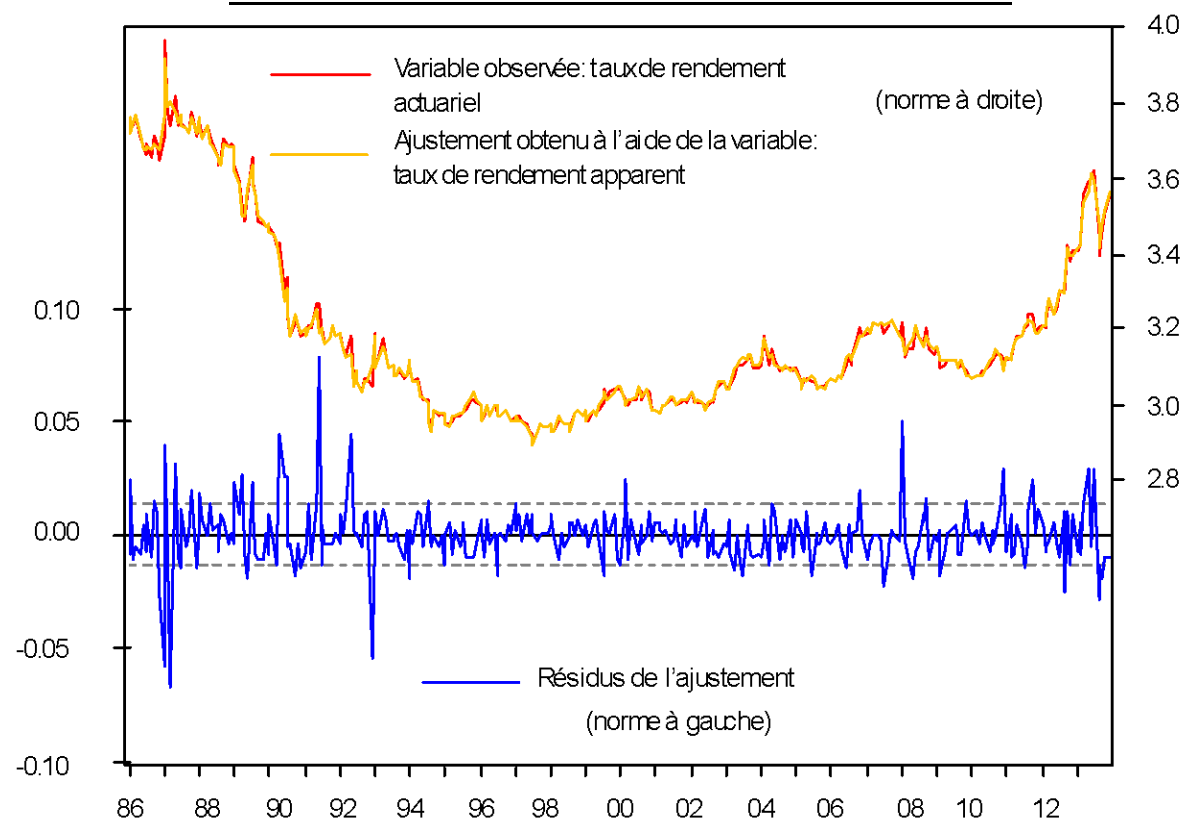
|  |          |             |          |                     |
|--|----------|-------------|----------|---------------------|
| Hypothèse nulle: Ordonnée à l'origine = 0              |          |             |          |                     |
| F-statistique  | 129.1673 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |
| $\chi^2$ (Khi-deux)                                    | 129.1673 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |
| Hypothèse nulle: Pente = 1                             |          |             |          |                     |
| F-statistique  | 45.56958 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |
| $\chi^2$ (Khi-deux)                                    | 45.56958 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |
| Hypothèse nulle: Ordonnée à l'origine = 0 et Pente = 1 |          |             |          |                     |
| F-statistique  | 2038.390 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |
| $\chi^2$ (Khi-deux)                                    | 4076.780 | Probabilité | 0.000000 | Restriction rejetée |

Aucune des restrictions ne tient : les coefficients testés individuellement sont significativement différents de 1 et 0; *a fortiori*, la double restriction est rejetée.

Conclusion : Les résultats économétriques montrent que *le taux de rendement courant est un assez bon indicateur du taux de rendement actuariel de la rente*; par contre les valeurs des paramètres sont différentes de ce qui est attendu.

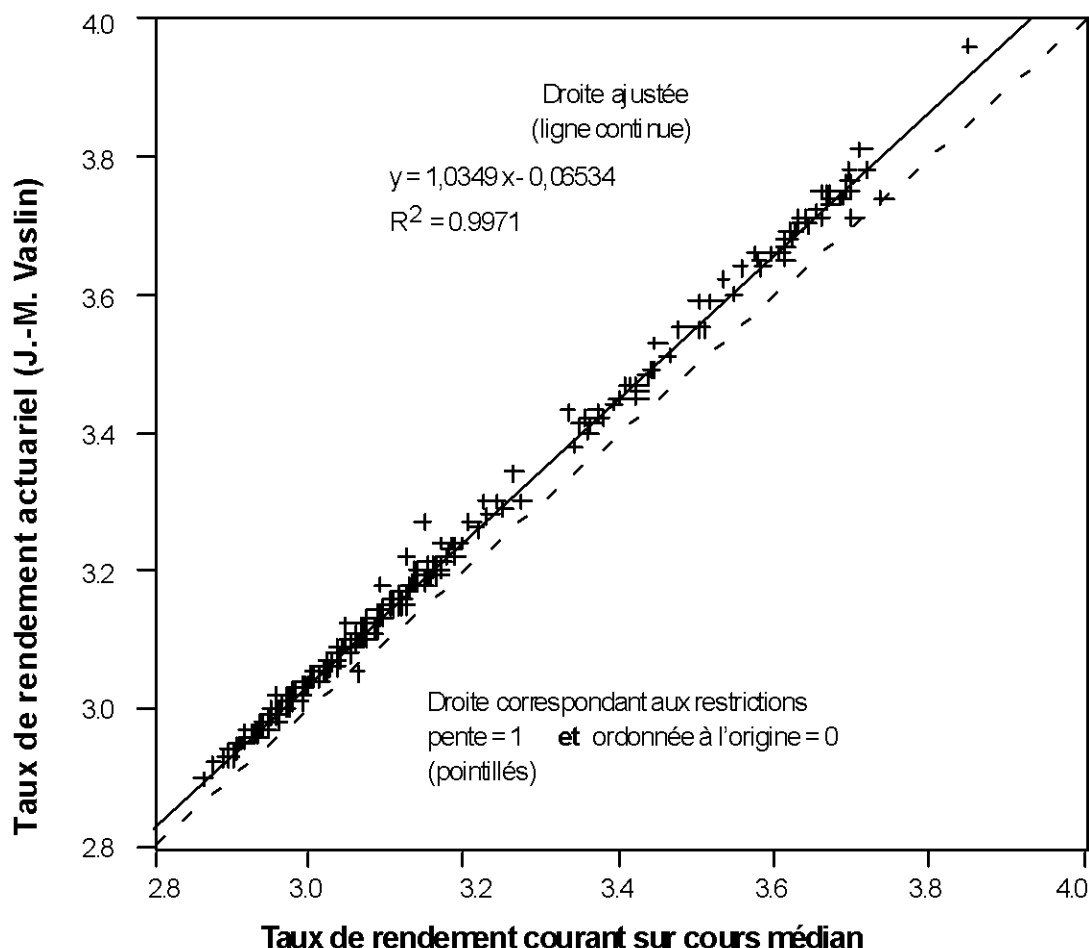
La représentation de la série chronologique “approximée” et ajustée conduit aux mêmes observations que précédemment : quasi impossibilité de distinguer la courbe observée et celle ajustée; résidus très faibles de l'ajustement comportant toutefois un certain nombre d'observations sortant fortement des bornes.

Graphique 3 — **VALEURS OBSERVÉES, AJUSTÉES ET RÉSIDUS DE L'AJUSTEMENT LINÉAIRE ENTRE TAUX DE RENDEMENT APPARENT ET TAUX DE RENDEMENT ACTUARIEL**



La représentation qui suit, sous forme de nuage de points, donne toutefois une illustration très différente de cette régression. Si les points sont bien alignés, avec quelques légères “aberrations”, on peut néanmoins observer un écart entre le modèle et la réalité, divergence qui s’accroît avec l’augmentation du taux de rendement; de façon à illustrer cette divergence, nous avons tracé en pointillés une droite qui correspond à la double restriction, pente = 1 et ordonnée à l’origine nulle, ce qui correspond à la première bissectrice :

Graphique 4 — **GRAPHIQUE DE L’AJUSTEMENT OBTENU SUR LES TAUX DE RENDEMENT**



La divergence systématique qui apparaît dans l’estimation du taux de rendement actuariel peut trouver son explication dans le calcul même du taux de rendement actuariel : en effet, celui-ci prend en compte la capitalisation de 4 coupons semestriels; de ce fait, le taux de rendement actuariel est, par nature, plus élevé que le taux de rendement courant sur cours médian. Mais en même temps, cette divergence peut être prise en compte (Vaslin, 1999, p. 132) en calculant ce que serait le taux de rendement courant s’il était capitalisé 4 fois par an; nous appelons le résultat de ce calcul *taux de rendement courant sur cours médian après correction*.

Le facteur de correction s’écrit  $\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 = (1 + s)$  où  $r$  est le taux de rendement courant sur cours médian et  $s$  le taux de rendement courant sur cours médian après correction.

Dans ces conditions, l’ajustement obtenu après correction est tout à fait remarquable.

Tableau 7 — Régression 3 b — **RÉSULTATS DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LES TAUX DE RENDEMENT APRÈS CORRECTION**

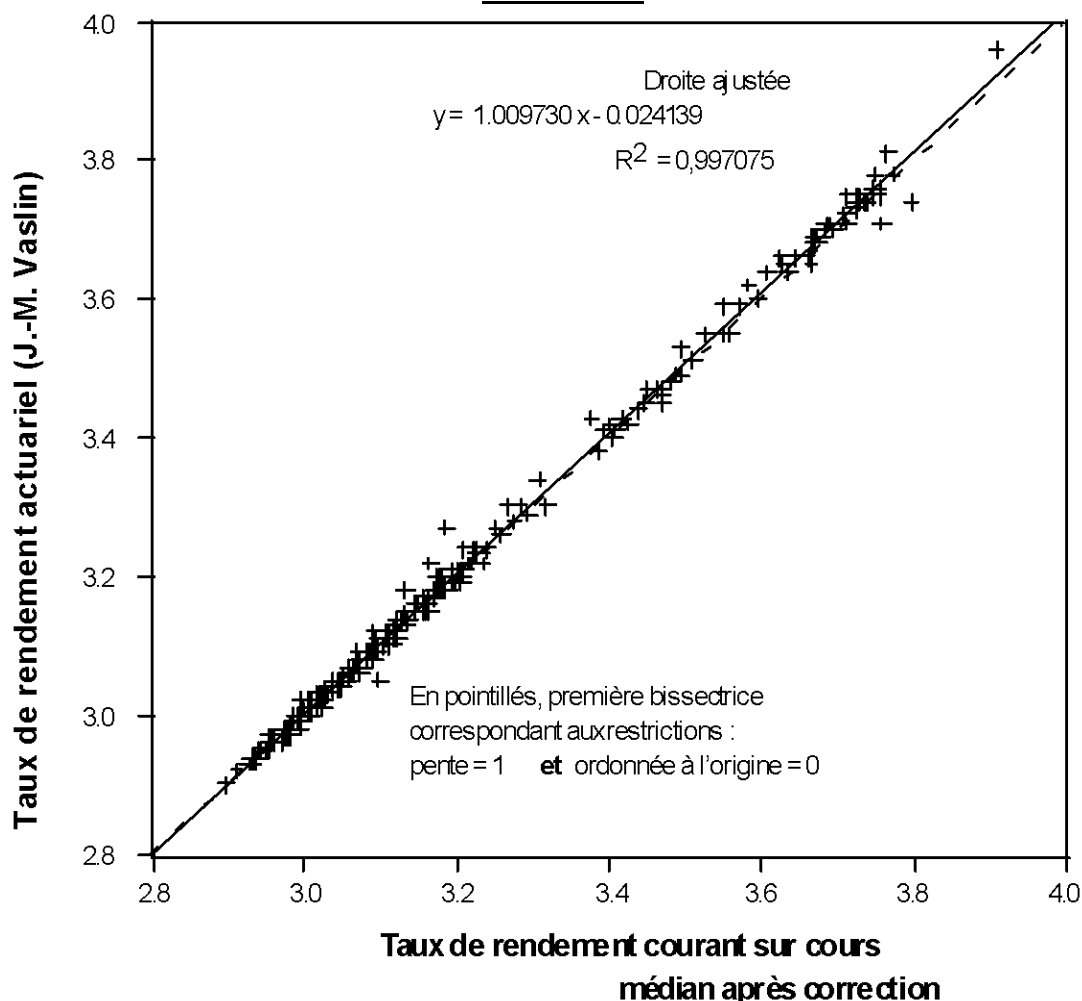
Variable expliquée : TAUX DE RENDEMENT ACTUARIEL  
 Variable explicative : TAUX DE RENDEMENT COURANT SUR COURS MÉDIAN APRÈS CORRECTION  
 Période : janvier 1886 à décembre 1913 (336 observations)

| Variable                  | Coefficient calculé | Ecart-type | T-statistique |
|---------------------------|---------------------|------------|---------------|
| Pente ( $\hat{a}$ )       | 1.009730            | 0.002993   | 337,3639      |
| Constante ( $\hat{b}_0$ ) | -0.024139           | 0.009555   | -2,52632      |
| R <sup>2</sup>            | 0.997075            |            |               |
| Durbin-Watson             | 2.117816            |            |               |

Au seuil de 5 %, nous vérifions que l'intervalle de confiance ne recouvre ni le coefficient de pente de *un*, ni l'ordonnée à l'origine *nulle*.

Si l'ajustement est très bon, par contre les paramètres de pente et d'ordonnée à l'origine divergent toujours respectivement de *un* et de *zéro*; le test rejette *a fortiori* la double restriction.

Graphique 4 b — **GRAPHIQUE DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LES TAUX DE RENDEMENT APRÈS CORRECTION**



Après correction, il se révèle que :

- la divergence systématique a pour ainsi dire disparu; par exemple, pour un taux de rendement sur cours médian corrigé de 3,5 %, la valeur du taux de rendement actuariel ajusté est de 3,50992 %, soit moins de un point de base de différence.

- le taux de rendement actuariel déterminé après des calculs laborieux et complexes peut être bien estimé à partir du taux de rendement sur cours médian à condition de corriger ce dernier de l'élément de capitalisation.

Dans ces conditions, nous disposons d'une méthode très allégée donnant des résultats remarquablement bons.

## **B — Une confirmation des conclusions de la régression : pas d'antériorité de l'information entre série "approximée" et série finement observée**

Une *corrélation* n'implique pas forcément une *causalité*, puisqu'un coefficient  $R^2$  élevée peut concerner des structures de nombres sans lien significatif entre elles, c'est-à-dire sans *implication causale*.

En anticipant quelque peu sur la deuxième partie, nous testons la causalité au sens de Granger sur les différences premières des variables finement observées et des variables approximées; puis nous recherchons la causalité dans le sens inverse. De plus, nous augmentons le nombre de retards, car la crédibilité des résultats en dépend assez fortement. Pour ne pas alourdir le texte, les résultats sont relégués en *Annexe*, mais leur signification est la suivante : dans tous les cas, la causalité au sens de Granger est biunivoque. Le test de Granger affirme qu'il n'y a aucune chance que le cours médian (approximé) n'explique pas le cours observé (exact); mais la réciproque est tout aussi vraie. La causalité est symétrique et aucune des variables ne contient une information préalable ou en excès de l'autre. Cette conclusion est validée que l'on prenne un nombre faible ou plus élevé d'éléments explicatifs, que l'on tienne compte ou non du coupon couru ou que l'on considère simplement le taux de rendement des rentes.

Il apparaît donc que les séries finement observées ne contiennent ni une information supplémentaire, ni une information antérieure à celle contenue dans les séries approximées. L'inverse est d'ailleurs tout aussi vrai.

## **C — Une deuxième confirmation dans la saisonnalité observée**

Nous avons désaisonnalisé les différentes séries selon la méthode additive <sup>1</sup>. Il est évident que nous attendons une saisonnalité dans les séries qui incluent le coupon qui s'accumule (cours plus bas, plus haut, cours médian, cours observé coupon couru). Par contre, si le marché est efficient, on ne "devrait pas" en constater sur les cours observés nus ou sur le taux de rendement actuariel calculé sur le cours nu; la question d'un élément de saisonnalité peut se poser en ce qui concerne les cours médian nus et le taux de rendement courant sur cours médian nu.

Si nous considérons nos séries, nous découvrons d'abord ce que nous attendons :

- un effet saisonnier pour le cours le plus haut du mois, pour le cours le plus bas et par voie de conséquence pour le cours médian (*Annexe*, tableau 1);

---

<sup>1</sup> La méthode multiplicative donne le même type de résultats, mais comme l'ampleur de la variation des cours est faible, les divergences entre les deux techniques sont très faibles. Il nous paraît évident que si, techniquement, la méthode multiplicative est meilleure, il est plus facile et il est plus intuitif pour le chercheur d'additionner ou de soustraire des coefficients saisonniers (qui signifient des écarts de quelques centimes "en trop" ou en "pas assez" certains mois) que de multiplier ou de diviser des observations brutes par les coefficients saisonniers qui signifient que certains mois, la valeur observée est x% "trop forte" ou "trop faible".

- un effet saisonnier en ce qui concerne le cours observé coupon couru (*Annexe, tableau 2*).

Étant donné que le coupon s'accumule jour après jour, le cours observé enregistre cette accumulation; comme le coupon se détache trimestriellement, nous ne sommes pas étonnés de constater ces chocs tous les 3 mois : *la saisonnalité de ces séries est celle attendue.*

Nous découvrons ensuite que les cours nus, qu'ils soient calculés sur des séries approximées ou exactes à partir des cours observés, contiennent un élément saisonnier important, visiblement lié au coupon trimestriel. Tout naturellement, les éléments qui en sont déduits (taux de rendement courant sur cours médian nu et taux de rendement actuariel) contiennent ce même élément. Il est à remarquer que ces séries ont été "nettoyées" de l'élément d'accumulation du coupon qui détermine une saisonnalité dans les cours, de manière fine et précise pour les séries relevées par J.-M. Vaslin, de manière grossière pour les autres séries. *Cette saisonnalité qui subsiste, notamment dans les séries exactes, ne plaide pas pour une efficience du marché.*

Il y a mieux : les coefficients de corrélation calculés entre les différentes séries de coefficients saisonniers de cours médian-coupon couru et cours observé-coupon couru, cours médian nu et cours observé nu ainsi qu'entre les taux de rendement courant sur cours médian nu et taux de rendement actuariels sont extrêmement élevés, les valeurs la plus basse étant 0,996 et la plus élevée 0,9995 (*Annexe, tableau 3*).

Les régressions et tests précédents ont été refaits en introduisant des processus autorégressifs (AR) de 1 à 12 ou en introduisant un mécanisme saisonnier de type SAR (3). Les résultats numériques sont très peu modifiés et les résultats des tests de restriction sont inchangés : on ne peut accepter simultanément une pente égale à 1 et une ordonnée à l'origine égale à zéro.

Très visiblement, il existe un facteur de saisonnalité important dans le cours des rentes au tournant du siècle dernier. Cet élément, mis en évidence quand on travaille soigneusement les séries, se retrouve aussi dans les séries approximées dont nous disposons. *L'ensemble de ces résultats, peu favorable sous l'angle de l'efficience du marché, montre au contraire que les séries assez grossières dont il est possible de disposer constituent un très bon indicateur de la réalité fine; il s'agit donc d'un point positif important pour l'utilisation de ces données.*

## **D — Conclusion provisoire**

Les approximations obtenues sont remarquables et expliquent pourquoi le travail rapide effectué par certains n'est pas à rejeter malgré des prémisses méthodologiques fausses.

Il demeure toutefois un certain nombre de problèmes dans les séries, tant approximées que finement observées

### **a — Des points aberrants**

La très grande valeur des résidus pour certaines observations laisse présumer la présence de chocs externes qu'il est difficile de prendre en compte dans l'analyse.

A partir de l'observation des résidus nous pouvons noter un choc négatif commun aux deux premières séries en juin 1891 et en janvier 1908 et un choc positif en décembre 1892. Ces écarts se retrouvent naturellement inversés pour la régression (3).

Ces points extrêmes peuvent être neutralisés par deux variables muettes, respectivement choc  $n$  et choc  $p$ . Leur introduction dans les équations améliore la qualité des ajustements mais ne modifie pratiquement pas la valeur des coefficients estimés. Les résultats du test d'hétéroscédasticité (voir *infra*) et des tests de restriction sont également inchangés.

### ***b — De l'autocorrélation sérielle***

On sait que les données chronologiques risquent d'être influencées par un facteur commun : le temps qui passe. Ce phénomène appelé "auto-corrélation sérielle" se mesure simplement par le coefficient de corrélation entre la série au temps  $t$  et la même série retardée dans le temps (1 mois, 2 mois, et ainsi de suite).

Au vu des résultats économétriques, nous n'avons pas de raison particulière de suspecter une autocorrélation du premier ordre. Toutefois les tables usuelles du test de Durbin-Watson ne vont pas au-delà de 100 observations. Comme nous bénéficions de 336 observations, nous utilisons le test de Breusch-Godfrey pour des autocorrélations d'ordre 1 jusqu'à 12 (c'est-à-dire jusqu'à un décalage de un an).

En ce qui concerne le cours-coupon couru, le résultat rejette l'hypothèse d'absence d'autocorrélation sérielle. A titre d'exemple, voila les résultats en ce qui concerne la relation entre le cours médian et le cours observé-coupon couru d'ordre 1 (un mois de retard).

Tableau 7 — **RÉSULTATS DU TEST DE CORRÉLATION SÉRIELLE DE BREUSCH-GODFREY SUR LES COURS OBSERVÉS-COUPON COURU, POUR UNE AUTOCORRÉLATION SÉRIELLE D'ORDRE 1**

|                   |          |             |          |                |                                  |
|-------------------|----------|-------------|----------|----------------|----------------------------------|
| F-statistique     | 5.395461 | Probabilité | 0.020791 | Signification: | présence de corrélation sérielle |
| Nbre obs. * $R^2$ | 5.357267 | Probabilité | 0.020636 | Signification: | présence de corrélation sérielle |

En conséquence, nous avons refait la régression entre le cours observé-coupon couru et le cours (approximé) médian-coupon couru avec une procédure de correction de l'auto-corrélation du premier ordre (avec et sans correction de l'hétéroscédasticité). Le coefficient d'autocorrélation est bien significatif, mais les coefficients de la régression sont pratiquement inchangés. Les résultats des tests de restriction ne sont pas modifiés.

En ce qui concerne le cours nu, il n'est pas possible d'admettre l'hypothèse d'absence d'autocorrélation sérielle, car le test rejette cette hypothèse à partir d'un retard de 2 mois.

Par contre, pour les taux de rendement, — approximés ou exacts — aucune autocorrélation sérielle n'est mise en évidence par le test de Breusch-Godfrey pour des ordres allant de 1 à 12.

### ***c — De l'hétéroscédasticité dans les séries***



Une des conditions de validité des régressions effectuées plus haut est la stabilité de la variance (homoscédasticité). Toutes les régressions font apparaître la présence d'une variance qui n'est pas stable, c'est-à-dire de l'hétéroscédasticité. Celle-ci peut être prise en compte au moyen de la correction de White. Nous avons refait les estimations en utilisant cette correction. Les résultats numériques sont très peu différents des résultats obtenus sans cette correction et les résultats des tests de restriction portant sur la valeur des coefficients de la régression ne sont pas modifiés. Ce point habituel dans les données boursières, apparaît ici avoir peu de conséquences, puisque les résultats corrigés ne sont pas différents des résultats bruts, ce qui nous indique que les deux types de séries sont soumises à la même forme d'instabilité.

Nous pouvons aller plus avant dans l'analyse des relations entre les deux types de mesures en recourant à l'étude de la cointégration. Cette méthode nous permettra de mettre en évidence l'évolution à long terme de nos variables et le mécanisme de correction des écarts à court terme entre variables finement observées et variables approximées.

## **II — Une approche par la cointégration**

Comme cela a été rappelé dans la première partie, les résultats de l'économétrie simple, en particulier les distributions statistiques des paramètres estimés sur lesquelles repose l'inférence, ne sont établies, à l'origine, que pour des variables stationnaires (Granger et Newbold, 1974; Phillips, 1986). Lorsque cette propriété n'est pas vérifiée, des problèmes sérieux sont susceptibles d'affecter les résultats des estimations. Il est toutefois possible de travailler sur données non stationnaires à condition que les variables utilisées soient cointégrées. On retrouve dans ce cas des propriétés encore meilleures (super-convergence) que dans le cas de stationnarité et les résultats des estimations peuvent faire l'objet d'une interprétation statistique fiable.

Il convient donc de s'assurer que les variables sont stationnaires ou à défaut d'établir leur ordre d'intégration (Haudeville, 1996). Cette procédure passe par la mise en oeuvre de tests de racine unitaires destinés à détecter la présence de racine unitaire incompatible avec la stationnarité. Lorsque l'hypothèse de racine unitaire n'est pas rejetée, le test est refait en différence première. Les tests ADF ont été faits dans les différents cas de figure possibles, avec ou sans trend et avec un nombre de retards fixé *a priori* ou déterminé par la minimisation du critère d'information de Schwartz. Les conclusions du test ne sont pas affectées par le choix des modalités.

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus avec un retard.

### **A — L'ordre d'intégration**

Si une variable  $y_t$  peut être mise sous la forme :

$$y_t = a y_{t-1} + v_t \quad (v \text{ étant un terme d'erreur})$$

et si  $a = 1$ , la série comporte une racine unitaire et ne peut être stationnaire;

par contre si  $a < 1$ , la variable  $y_t$  est stationnaire

Le test dit de racine unitaire permet de vérifier cette hypothèse. Lorsqu'une variable n'est pas stationnaire, on teste ses différences successives, ce qui permet de définir son ordre d'intégration. Une variable qui n'est pas stationnaire, mais dont la différence à l'ordre  $k$  est stationnaire, est par définition intégrée d'ordre  $k$ .

Le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF) sur les séries en niveau ne permet pas de rejeter l'hypothèse de racine unitaire; dans un deuxième temps, le même type de test sur les séries en différences premières nous permet de préciser qu'il n'existe pas de racine unitaire sur les différences premières. La conclusion est que les séries statistiques sont intégrées d'ordre 1.

### **a — Les tests en niveau**

Ce type de test est conduit systématiquement sur les cours médians-coupon couru, puis sur les cours médian nus et sur les taux de rendement sur cours médian enfin sur les mêmes variables observés avec soin. Le tableau indique les résultats du calcul de la valeur de la statistique pour 1 retard et les valeurs critiques de rejet aux différents seuils sont indiquées sur le côté.

Tableau 8 — **RÉSULTATS ÉCONOMÉTRIQUES DU TEST DE DICKEY-FULLER AUGMENTÉ (ADF), EN NIVEAU, 1 RETARD**

| ADF Test Statistique               |           | Seuils               |         |
|------------------------------------|-----------|----------------------|---------|
| Cours médians-coupon couru         | 0,150708  | Valeur critique 1% * | -2.5717 |
| Cours médians nus                  | 0,177749  | Valeur critique 5%   | -1.9405 |
| Taux de rendement sur cours médian | -0,433127 | Valeur critique 10%  | -1.6161 |
| Cours observés-coupon couru        | 0,192703  |                      |         |
| Cours observés nus                 | 0,193152  |                      |         |
| Taux de rendement actuariel        | -0,502419 |                      |         |

\* Valeurs critiques de rejet de l'hypothèse d'une racine unitaire au test de MacKinnon.

La racine unitaire est systématiquement acceptée. Il apparaît réaliste de penser que les séries sont intégrées de type  $I(1)$ . Encore convient-il de vérifier que cette racine est unique.

### **b — Les tests en différence première**

Nous refaisons le même type de tests, sur les mêmes variables, mais cette fois en différence première.

Tableau 9 — **RÉSULTATS ÉCONOMÉTRIQUES DU TEST DE DICKEY-FULLER AUGMENTÉ (ADF), EN DIFFÉRENCE PREMIÈRE, 1 RETARD**

| ADF Test Statistique               |           | Seuils               |         |
|------------------------------------|-----------|----------------------|---------|
| Cours médians-coupon couru         | -14,59137 | Valeur critique 1% * | -2.5717 |
| Cours médians nus                  | -16,75536 | Valeur critique 5%   | -1.9405 |
| Taux de rendement sur cours médian | -14,30205 | Valeur critique 10%  | -1.6161 |
| Cours observés-coupon couru        | -18,79478 |                      |         |
| Cours observés nus                 | -15,51493 |                      |         |
| Taux de rendement actuariel        | -16,20787 |                      |         |

\* Valeurs critiques de rejet de l'hypothèse d'une racine unitaire au test de MacKinnon.

La racine unitaire est systématiquement rejetée : donc ces séries ne sont pas intégrées à un ordre supérieur à l'ordre 1.

Les mêmes tests ont été effectués pour des retards allant de 0 à 4 périodes; les conclusions ne sont pas modifiées.

Des travaux récents ont montré que le test de Dickey Fuller Augmenté, s'il est fiable dans la plupart des cas, pouvait présenter une perte notable de puissance lorsque la racine de la partie AR est proche de l'unité et surtout lorsque la partie MA contient un coefficient négatif (Ng et Perron, 1996).

Pour pallier ces problèmes, des modifications substantielles ont été apportées aux tests et de nouveaux tests plus performants dans ces cas de figure ont été mis au point.

Nous recommandons avec le test modifié proposé par Elliot, Rothenberg et Stock (1996) consistant à travailler sur des résidus “ détrendés ” des variables. Plusieurs combinaisons sont là aussi possibles, en particulier concernant le nombre de retards maximum pris en compte. Nous choisissons un nombre de retards qui minimise le critère d'information de Schwartz, bien que l'on ait montré que cette solution puisse conduire à des troncatures insuffisamment longues (Ng et Perron, 1995).

Tableau 10 — **RÉSULTATS RÉSUMÉS DU TEST ELLIOT-ROTHENBERG-STOCK (ERS)**

| Unit Root Test on  | Null Hypothesis                    | DF-GLS test statistic | Test critical values |
|--------------------|------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| COURSOBSNU         | COURSOBSNU has a unit root         | -0,324770             | 1% level             |
| D(COURSOBSNU)      | D(COURSOBSNU) has a unit root      | -20,92218             | -3,473500            |
| COURSMEDIAN        | COURSMEDIAN has a unit root        | -0,060179             | 5% level             |
| D(COURSMEDIAN)     | D(COURSMEDIAN) has a unit root     | -5,501774             | -2,903000            |
| COURSMEDNU         | COURSMEDNU has a unit root         | -0,103505             | 10% level            |
| D(COURSMEDNU)      | D(COURSMEDNU) has a unit root      | -6,569674             | -2,592750            |
| COURSOBSCPCOURU    | COURSOBSCPCOURU has a unit root    | -0,023086             |                      |
| D(COURSOBSCPCOURU) | D(COURSOBSCPCOURU) has a unit root | -7,437159             |                      |
| TXRENDACTU         | TXRENDACTU has a unit root         | -0,96664              |                      |
| D(TXRENDACTU)      | D(TXRENDACTU) has a unit root      | -21,62106             |                      |
| TXRENDCOURSMED     | TXRENDCOURSMED has a unit root     | 0,038301              |                      |
| D(TXRENDCOURSMED)  | D(TXRENDCOURSMED) has a unit root  | -3,285650             |                      |

Conséquence : Nous déduisons des observations précédentes que la racine unitaire est unique. Cela signifie que *les six séries sont intégrées d'ordre 1, ce qui est tout à fait classique dans les séries financières*.

Mais ce résultat a une autre portée, beaucoup plus embarrassante : il implique que les résultats de la première partie, qui semblaient si convaincants, risquent de ne pas être aussi pertinents que ce que l'on pouvait le supposer et d'aboutir à des corrélations fortuites (*spurious correlations*). Dans ces conditions, il est nécessaire de passer par une étude de la cointégration entre les séries fines et les séries "approximées".

## B — La cointégration

Pour vérifier l'existence d'une relation étroite dans la longue période entre les variables observées et leurs approximations, on recherche la présence de relations de cointégration. Nous refaisons les régressions de la première partie et testons l'ordre d'intégration des résidus avec le test d'Engle et Granger.

Tableau 11 - **RÉSULTATS ÉCONOMÉTRIQUES DU TEST D'ENGLE ET GRANGER**

| Relation de cointégration retenues                                  | Seuils calculés |
|---|-----------------|
| Cours observé coupon couru / Cours médians-coupon couru, C          | -18,73885       |
| Cours observé nu / Cours médians nu, C                              | -20,51658       |
| Taux de rendement actuariel / Taux de rendement sur cours médian, C | -18,62911       |

La valeur critique à 5 % calculée par la table de MacKinnon (MacKinnon, 1991) est égale à -2,87. Nos couples de séries (série observées avec précision et séries approximées) sont par conséquent cointégrées (1, 1). Bien qu'il ait été montré empiriquement que les résultats du test de Engle et Granger sont assez robustes, nous vérifions ce résultat avec le test ERS. L'hypothèse de cointégration est acceptée pour tous nos couples de variables <sup>1</sup>.

Tableau 12 - **RÉSULTATS RÉSUMÉS DU TEST DF-GLS SUR LES RÉSIDUS**

| Unit Root Test on              | DF-GLS test statistic on detrended residuals | Test critical values |
|--------------------------------|--|----------------------|
| COURSMEDNU et COURSOBSNU       | -2,926939                                    | 1% level : -3.4724   |
| TXRENDACTU et TXRENDCOURSMED   | -17,58511                                    | 5% level : -2.9052   |
| COURSMEDIAN et COURSOBSCPCOURU | -3,010764                                    | 10% level : -2.5966  |

<sup>1</sup> A 10% seulement pour le cours médian nu et le cours observé nu .

L'existence de relations de cointégration implique le parallélisme des évolutions de longue période. Pour analyser les évolutions de courte période, nous pouvons faire appel au mécanisme de correction d'erreur. En effet, le théorème de représentation de Granger (Granger, 1983) nous montre qu'entre variables cointégrées (1, 1), il existe une représentation par un modèle à correction d'erreur (MCE) équivalente à la relation de cointégration. Cette relation permet d'explicitier la dynamique de court terme.

Après avoir vérifié que les logarithmes des cours sont bien cointégrés, nous vérifions que le coefficient de régression du cours médian n'est pas statistiquement différent de l'unité au moyen d'un test de restriction.

Tableau 13 — **RÉSULTATS DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LES LOG DES COURS APPROXIMÉS NUS ET DES COURS EXACTS NUS**

Variable expliquée : LOG COURS OBSERVÉ NU

Variable explicative : LOG COURS MÉDIAN NU

Période : janvier 1886 à décembre 1913 (336 observations)

| Variable                  | Coefficient calculé | Ecart-type | T-statistique |
|---------------------------|---------------------|------------|---------------|
| Pente ( $\hat{\alpha}$ )  | 1.003372            | 0.003085   | 325,2871      |
| Constante ( $\hat{b}_0$ ) | -0.014676           | 0.014059   | -1,043880     |
| R <sup>2</sup>            | 0.996853            |            |               |
| Durbin-Watson             | 2.178299            |            |               |

Au seuil de 5 %, nous vérifions que l'intervalle de confiance recouvre le coefficient de pente de *un* ainsi que l'ordonnée à l'origine *nulle*.

Le modèle à correction d'erreur (MCE) s'écrit dans ces conditions:

$$D \text{ LCOURS OBSNU} = \alpha D \text{ LCOURS MEDNU} - \gamma (\text{LCOURS MEDNU} - \text{LCOURS OBSNU})_{-1} + C$$

D symbolise la différence première, L le logarithme népérien et la variable COURSOBSNU représente le cours observé nu et COURSMEDNU est le cours médian nu et alors que le terme ECT correspond à la différence de Log COURSOBSNU - Log COURSMEDNU.

Tableau 14 — **RÉSULTATS DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LE MODÈLE À CORRECTION D'ERREUR SUR LES COURS NUS**

Variable expliquée : D L COURS OBSERVÉ NU (cours exacts)

Variables explicatives : D L COURS MÉDIAN NU (cours "approximés")

ECT (-1)(Rapidité de l'ajustement, un retard)

Période : janvier 1886 à décembre 1913 (335 observations après ajustement aux bornes)

| Variable                  | Coefficient calculé | Ecart-type | T-statistique |
|---------------------------|---------------------|------------|---------------|
| Pente ( $\hat{\alpha}$ )  | 0.885422            | 0.021145   | 41,87377      |
| Rapid. ajust.             | -1.087798           | 0.052405   | 20,75771      |
| Constante ( $\hat{b}_0$ ) | 0.000765            | 0.000212   | 3,610429      |
| R <sup>2</sup>            | 0.869452            |            |               |
| Durbin-Watson             | 2.041987            |            |               |

Le résultat de la régression montre que l'ajustement entre les deux cours est très rapide avec une légère tendance au surajustement. Toutefois un test de restriction permet d'affirmer que le coefficient du terme de correction (ECT) n'est pas significativement différent de -1.

Tableau 15 — **TEST SUR LE PARAMÈTRE DE RAPIDITÉ D'AJUSTEMENT**

Hypothèse nulle: Rapidité de l'ajustement = -1

|                     |          |             |          |
|---------------------|----------|-------------|----------|
| F-statistic         | 2.806937 | Probabilité | 0.094799 |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 2.806937 | Probabilité | 0.093857 |

La signification de ces résultats est que les erreurs commises en utilisant les mesures approximées se résorbent très rapidement.

Dès lors, la conclusion que l'on peut retirer du MCE est que l'ajustement du cours précis calculé avec toutes les précautions indiquées au début de ce papier par rapport au cours approximatif se réalise entièrement dans le délai d'une période, c'est-à-dire un mois au plus.

En ce qui concerne le cours médian coupon couru, la conclusion est un peu différente. Dans notre cas, le modèle à correction d'erreur où la variable  $D\text{LCOURSOBSCPCOURU}$  est la différence première des Log des cours observés-coupon couru, s'écrit :

$$D\text{LCOURSOBSCPCOURU} = \alpha d\text{LCoursMedpcouru} - \gamma (\text{LCoursMedpcouru} - \text{LCOURSOBSCPCOURU}) - 1 + c$$

Les résultats de l'équation d'ajustement et des tests de restrictions sont les suivants :

Tableau 16 — **RÉSULTATS DE L'AJUSTEMENT OBTENU SUR LE MODÈLE À CORRECTION D'ERREUR SUR LES COURS-COUPON COURU**Variable expliquée :  $D(\text{L COURS OBSERVÉS-COUPON COURU})$  (cours exacts)Variables explicatives :  $D\text{L COURS MÉDIAN}$  (cours "approximés"-coupon couru) $\text{ECT-COUPON COURU}(-1)$  (Rapidité de l'ajustement, un retard)

Période : janvier 1886 à décembre 1913 (335 observations après ajustement aux bornes)

| Variable                             | Coefficient calculé | Ecart-type | T-statistique |
|--------------------------------------|---------------------|------------|---------------|
| Pente ( $\hat{\alpha}$ )             | 0.924949            | 0.027904   | 33,14812      |
| Rapid. ajust.                        | -1.196251           | 0.059170   | -20,21717     |
| Constante ( $b, \hat{\phantom{a}}$ ) | 0.001982            | 0.000247   | 8,037015      |
| $R^2$                                | 0.881689            |            |               |
| Durbin-Watson                        | 1.984873            |            |               |

Tableau 17 — **TEST SUR LE PARAMÈTRE DE RAPIDITÉ D'AJUSTEMENT**

Hypothèse nulle: Rapidité de l'ajustement = -1

|                     |          |             |          |
|---------------------|----------|-------------|----------|
| F-statistic         | 11,00068 | Probabilité | 0,001012 |
| $\chi^2$ (Khi-deux) | 11,00068 | Probabilité | 0,000911 |

Le terme de correction d'erreur est significativement supérieur à l'unité, ce qui indique un phénomène de surajustement susceptible d'engendrer des reports d'écarts successifs pouvant être à l'origine d'un désajustement léger mais permanent entre série approximée et série observée avec précision.

## **Conclusion générale**

Nous pouvons assez facilement obtenir des séries qui comportent des incertitudes essentielles, beaucoup plus difficilement des séries “propres”. Or malgré toutes les imprécisions que contiennent ces séries approximées, il apparaît que :

- Celles-ci constituent d’assez bonnes approximations des phénomènes : les cours correctement observés sont bien prédits par les cours médians, les cours observés nus sont bien estimés par les cours médians nus (et l’on sait quelle est l’approximation attachée à l’évaluation du coupon couru); enfin le taux de rendement actuariel est bien approché par le taux de rendement approximatif que nous avons utilisé.
- Les problèmes de saisonnalité que les séries encourent sont les mêmes : ce point, qui montre en même temps une certaine inefficience du marché, nous renforce dans l’idée que les séries finement observées sont sujettes aux mêmes influences que les séries approximées.
- Il n’existe pas d’antériorité d’information des séries finement observées par rapport aux séries “approximées” : cet élément, qui conforte le point précédent, est extrêmement favorable, car il signifie que le dépouillement précis ne donne pas d’information supplémentaire par rapport au relevé grossier.

Nous pourrions donc en conclure que les données approximatives dont nous disposons suffisent et qu’il n’est pas besoin de procéder à des dépouillements fins. Cette conclusion serait hâtive, car les séries présentent des autocorrélations sérielles et ont des variances instables.

Nous sommes donc amenés à une approche plus complexe du problème.

- Tant les séries approximées et que celles correctement observées sont intégrées d’ordre 1. La cointégration des deux types de séries est vérifiée, ce qui signifie que, si à court terme une divergence d’évolution peut apparaître, à long terme les évolutions sont les mêmes.
- De plus, comme le montrent les résultats des modèles à correction d’erreur, l’utilisation d’un cours approché nu par rapport à un cours précis nu introduit un écart qui est entièrement résorbé dans un délai d’une période, c’est-à-dire d’un mois. Dans le cas des séries coupon couru, on note un phénomène de surajustement impliquant la présence d’un écart faible mais persistant entre les deux séries.
- Pour des calculs financiers fins, il est vraisemblable qu’il faut passer par des dépouillements soigneux des données. Mais il est peu probable que les éléments de connaissance acquis au moyen des séries approximées puissent être mis en doute au moyen d’un travail très fin.

## Annexes

Tableau 1 — **RÉSULTATS ÉCONOMÉTRIQUES DE LA DÉSAISONNALISATION, PAR MÉTHODE ADDITIVE, SUR LES COURS PLUS HAUT, PLUS BAS, MÉDIAN ET SUR LE TAUX DE RENDEMENT COURANT SUR COURS MÉDIAN NU**

| Mois | Cours plus haut, coupon couru | Cours plus bas, coupon couru | Cours médian, coupon couru | Cours médian nu | Taux de rendement courant sur cours médian nu |
|------|-------------------------------|------------------------------|----------------------------|-----------------|---|
| 1    | -0.305307                     | -0.251952                    | -0.278630                  | -0.278630       | 0.009479                                      |
| 2    | 0.115480                      | 0.121921                     | 0.118700                   | -0.127875       | -0.001618                                     |
| 3    | 0.322393                      | 0.145147                     | 0.233770                   | 0.480345        | -0.007194                                     |
| 4    | -0.242144                     | -0.172662                    | -0.207403                  | -0.207403       | 0.007052                                      |
| 5    | -0.037082                     | 0.024159                     | -0.006462                  | -0.253037       | 0.000250                                      |
| 6    | 0.157995                      | -0.179931                    | -0.010968                  | 0.235608        | 0.000407                                      |
| 7    | -0.280153                     | -0.085548                    | -0.182850                  | -0.182850       | 0.005551                                      |
| 8    | 0.194754                      | 0.437245                     | 0.316000                   | 0.069425        | -0.010553                                     |
| 9    | 0.429847                      | 0.186782                     | 0.308315                   | 0.554890        | -0.010588                                     |
| 10   | -0.445940                     | -0.190486                    | -0.318213                  | -0.318213       | 0.009348                                      |
| 11   | -0.138857                     | 0.015532                     | -0.061662                  | -0.308238       | 0.001555                                      |
| 12   | 0.229014                      | -0.050208                    | 0.089403                   | 0.335978        | -0.003689                                     |

Tableau 2 — **RÉSULTATS ÉCONOMÉTRIQUES DE LA DÉSAISONNALISATION, PAR MÉTHODE ADDITIVE, SUR LES VALEURS OBSERVÉES DU COURS COUPON COURU ET NU ET SUR LE TAUX DE RENDEMENT ACTUARIEL**

| Mois | Cours observé, coupon couru | Cours observé nu | Taux de rendement actuariel |
|------|-----------------------------|------------------|-----------------------------|
| 1    | -0.421788                   | -0.183117        | 0.006831                    |
| 2    | -0.007389                   | -0.023488        | 0.003575                    |
| 3    | 0.471283                    | 0.231883         | -0.007505                   |
| 4    | -0.325908                   | -0.083133        | 0.003282                    |
| 5    | -0.240538                   | -0.239645        | 0.008760                    |
| 6    | 0.203490                    | -0.031852        | 0.001044                    |
| 7    | -0.291386                   | -0.038935        | 0.001600                    |
| 8    | 0.228398                    | 0.231528         | -0.008122                   |
| 9    | 0.625759                    | 0.370031         | -0.013832                   |
| 10   | -0.545198                   | -0.291265        | 0.009177                    |
| 11   | -0.116602                   | -0.115324        | 0.003004                    |
| 12   | 0.419879                    | 0.173318         | -0.007814                   |

Tableau 3 — **COEFFICIENTS DE CORRÉLATIONS CALCULÉS ENTRE LES SÉRIES DES COEFFICIENTS SAISONNIERS DES COURS MÉDIAN COUPON COURU ET COURS OBSERVÉ COUPON COURU, COURS MÉDIAN NU ET COURS OBSERVÉ NU ET LES TAUX DE RENDEMENT SUR COURS MÉDIAN NU ET TAUX DE RENDEMENT ACTUARIELS**

|  | coef saisonnier cours médian | coef saisonnier cours obs. cp couru | coef saisonnier cours médian nu | coef saisonnier cours obs. nu | coef saisonnier taux rendement courant sur cours médian nu | coef saisonnier taux rendement actuariel |
|--|------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|--|--|
| coef saisonnier cours médian                               | —                            | 0.998372                            | -0.997391                       | -0.996159                     | 0.999514   | 0.998493                                 |
| coef saisonnier cours obs. cp couru                        | 0.998372                     | —                                   | -0.996389                       | -0.997578                     | 0.998558   | 0.999511                                 |
| coef saisonnier cours médian nu                            | -0.997391                    | -0.996389                           | —                               | 0.998536                      | -0.997849  | -0.995977                                |
| coef saisonnier cours obs. nu                              | -0.996159                    | -0.997578                           | 0.998536                        | —                             | -0.996300  | -0.997113                                |
| coef saisonnier taux rendement courant sur cours médian nu | 0.999514                     | 0.998558                            | -0.997849                       | -0.996300                     | —  | 0.998209                                 |
| coef saisonnier taux rendement actuariel                   | 0.998493                     | 0.999511                            | -0.995977                       | -0.997113                     | 0.998209   | —  |



Tableau 4 — L'ORDRE DE CAUSALITÉ DANS LES SÉRIES EN DIFFÉRENCE PREMIÈRE**L'ordre de la causalité dans les cours coupon couru**

| <b>Hypothèse nulle; 5 retards</b>                         | Obs. | F-Statistique | Probabilité |
|---|------|---------------|-------------|
| DCOURSOBSCPCOURU n'est pas une cause-Granger DCOURSMEDIAN | 330  | 11.8105       | 1.7E-10     |
| DCOURSMEDIAN n'est pas une cause-Granger DCOURSOBSCPCOURU |      | 32.8807       | 0.00000     |

| <b>Hypothèse nulle; 10 retards</b>                        |     |         |         |
|---|-----|---------|---------|
| DCOURSOBSCPCOURU n'est pas une cause-Granger DCOURSMEDIAN | 325 | 5.06513 | 7.8E-07 |
| DCOURSMEDIAN n'est pas une cause-Granger DCOURSOBSCPCOURU |     | 17.6566 | 0.00000 |

| <b>Hypothèse nulle; 20 retards</b>                        |     |         |         |
|---|-----|---------|---------|
| DCOURSOBSCPCOURU n'est pas une cause-Granger DCOURSMEDIAN | 315 | 2.50033 | 0.00051 |
| DCOURSMEDIAN n'est pas une cause-Granger DCOURSOBSCPCOURU |     | 8.32210 | 0.00000 |

**L'ordre de la causalité dans les cours nus**

| <b>Hypothèse nulle; 5 retards</b>                   | Obs. | F-Statistique | Probabilité |
|---|------|---------------|-------------|
| DCOURSMEDNU n'est pas une cause-Granger DCOURSOBSNU | 330  | 15.5119       | 1.2E-13     |
| DCOURSOBSNU n'est pas une cause-Granger DCOURSMEDNU |      | 2.61433       | 0.02462     |

| <b>Hypothèse nulle; 10 retards</b>                  |     |         |         |
|---|-----|---------|---------|
| DCOURSMEDNU n'est pas une cause-Granger DCOURSOBSNU | 325 | 13.8883 | 0.00000 |
| DCOURSOBSNU n'est pas une cause-Granger DCOURSMEDNU |     | 3.18206 | 0.00067 |

| <b>Hypothèse nulle; 20 retards</b>                  |     |         |         |
|---|-----|---------|---------|
| DCOURSMEDNU n'est pas une cause-Granger DCOURSOBSNU | 315 | 7.70531 | 0.00000 |
| DCOURSOBSNU n'est pas une cause-Granger DCOURSMEDNU |     | 2.19173 | 0.00279 |

**L'ordre de la causalité dans les taux de rendement**

| <b>Hypothèse nulle; 5 retards</b>                       | Obs. | F-Statistique | Probabilité |
|---|------|---------------|-------------|
| DTXRENDCOURSMED n'est pas une cause-Granger DTXRENDACTU | 330  | 29.5620       | 0.00000     |
| DTXRENDACTU n'est pas une cause-Granger DTXRENDCOURSMED |      | 7.64313       | 8.4E-07     |

| <b>Hypothèse nulle; 10 retards</b>                      |     |         |         |
|---|-----|---------|---------|
| DTXRENDCOURSMED n'est pas une cause-Granger DTXRENDACTU | 325 | 19.2310 | 0.00000 |
| DTXRENDACTU n'est pas une cause-Granger DTXRENDCOURSMED |     | 4.74996 | 2.5E-06 |

| <b>Hypothèse nulle; 20 retards</b>                      |     |         |         |
|---|-----|---------|---------|
| DTXRENDCOURSMED n'est pas une cause-Granger DTXRENDACTU | 315 | 9.12491 | 0.00000 |
| DTXRENDACTU n'est pas une cause-Granger DTXRENDCOURSMED |     | 2.62103 | 0.00026 |

## ÉLÉMENTS DE RÉFÉRENCE BIBLIOGRAPHIQUE

ARBULU, P., (1998), *Le marché parisien des actions au XIX<sup>e</sup> siècle: performance et efficience d'un marché émergent*, Thèse de doctorat, Orléans

(DE) BIRIEUX (sous la direction de), (1857), *Annuaire de la bourse et de la banque*, Cote B.N. : V-30 375

BUCHÈRE, A., (1877), *Traité théorique et pratique des opérations de bourse*, in-8°, XI-622 p., Marescq aîné, Paris, , Cote B.N. : 8-F-341

COURTOIS, A., *Des Opérations de bourse, ou Manuel des fonds publics français et étrangers et des actions et obligations de sociétés françaises et étrangères négociés à Paris, précédé d'une appréciation des opérations de bourse dites de jeu, et des rapports de la bourse avec le crédit public et les finances de l'État*, in-18, 425 p., Guillaumin, Paris, 1855, Cote B.N. : V-35621; in-18, 536 p., 1856, Cote B.N. : V-35622; in-18, 443 p., 1859, Cote B.N. : V-35623; in-18, 1861, Cote B.N. : 16-V-1994;

COURTOIS, A., (1863), *Manuel des fonds publics français et des société par actions*, in-16, 748 p., Garnier Frères, Paris, , Cote B.N. : V-35626; 5<sup>e</sup> éd., in-16, 554 p., 1874, Cote B.N. : V-35627; 8<sup>e</sup> éd., VIII-1282 p., 1883, Cote B.N. : 8-V-6256

COURTOIS fils (Alphonse), (1877), *Tableaux des cours des principales valeurs négociées et cotées aux Bourses des effets publics de Paris, Lyon et Marseille*, Garnier frères, Guillaumin & Cie, PARIS, 3<sup>e</sup> édition

COURTOIS, A., (1879), *Traité élémentaire des opérations de Bourse et de change*, 7<sup>e</sup> éd., in-16, XII-474 p., Garnier Frères, Paris, Cote B.N. : 8-V-2237

DAUXERRE, (1861), *Bourse de Paris. Tarif de la rente 3 et 4 1 / 2 pour cent, à l'usage des rentiers sur l'État*,. In-18, 55 p., Bouquet, Troyes , Code B.N. :V- 32957

DELOMBRE, (1870), *Annales financières (1863-1869)*, Paris, , Cote B.N. : V-36627

DICKEY, D. A. et FULLER, W. A., (1979), “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, *Journal of the American Statistical Association*,

ELLIOT, G., ROTHENBERG, T. J. and STOCK, J. H., (1996), “Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root”, *Econometrica*, .

GRANGER, C.W.J. & NEWBOLD P., (1974), “Spurious Regressions in Econometrics”, *Journal of Econometrics*, 1045-66

GRANGER, C.W.J., (1983), “Co-integrated Variables and Error-correcting Models”, *Document de travail*, Université de San Diego

HAUDEVILLE, B., (1996), *Econométrie appliquée*, Ed. ESTEM, PARIS

HOMER, S. & SYLLA, R., (1991), *A History of Interest Rates*, Rutgers University Press, 3e ed., Londres 1991

LALOU, A., (1869), *La Lumière et l'expérience pour tous, résumé synoptique, arithmographique, historique et tout à la fois comparatif des cours de la rente française et*

*des principales valeurs de Bourse (années 1847-1868)*, Gr. in-fol. plano, impr. de Lecointe frères, Rouen, (s. d.), Code B.N. : VP- 107

LENOIR, M., Le mouvement des cours des valeurs mobilières françaises depuis 1856, *Bulletin de la Statistique Générale de la France*, octobre 1919

MACKINNON, J., (1991), “Critical Values For Cointegration Tests” in ENGLE et GRANGER, *Long Run Economic Relationships*, Oxford University Press

NEWKEY, W.K. et WEST, K.D., (1987), “ A Simple Positive Semi-definite Heteroskedacity and Autocorrelation Consistant Covariance Matrix ”, *Econometrica*, 55, pp 703-8

NG, S. et PERRON, P., (1995), “ Unit Root Test in ARMA Models with Data-Dependant Methods for the Selection of the Truncation Lag ”, *Journal of the American Statistical Association*

NG, S. et PERRON, P., (1997), “ Estimation and Inference in Nearly Unbalanced Nearly Cointegrated Systems ”, *Journal of Econometrics*

NG, S. et PERRON, P., (2001), “ Lag Length Selection and the Construction of Unit Root Tests with Good Size and Power ”, *Econometrica*

PEREYRE, (1896), *Manuel des valeurs de bourse*, 708 p., Paris, Cote B.N. : 4-V-4031

PHILLIPS, P.C.B., (1986), “Understanding Spurious Regressions in Econometrics”, *Journal of Econometrics*, 311-340

PHILLIPS, P. C. B., (1987), “ Time Series Regression with a Unit Root ” *Econometrica*

PHILLIPS, P. C. B. et PERRON, P., (1988), “ Testing for a Unit Root in Time Series Regression ”, *Biometrika*

SAID, S.E. et DICKEY, D. A., (1984), “ Testing for Unit Root in Autoregressive-Moving Average Models of Indefinite Order ”, *Biometrika*

SALA, A.E., (1836), *Manuel des placements industriels*, 300 p., Hivert, Paris, Cote B.N. : V-52270

SÉDILLOT, L.-P. (pseud. Lamst), (1853), *Manuel de la Bourse, ou Guide du capitaliste, du rentier, de l'agent de change et du banquier...* par Lamst, 14e édition, in-16, VI-268 p., E. Ducrocq, Paris, , Cote B.N. : V- 43703

VASLIN, J.-M., (1999), *Le marché des rentes françaises au XIX<sup>e</sup> siècle et la crédibilité de l'État*, Thèse de doctorat, Orléans

VIAENNE, A., (2002), *L'effcience du marché à primes de Paris au XIX<sup>e</sup> siècle*, Thèse de doctorat, Orléans.

VITU, A., (1863), *Guide financier répertoire général des valeurs financières et industrielles*, 1066 p., Hachette, Paris, , Cote B.N. : V-55159

WHITE, H., (1980), “ A Heteroskedacity-Consistant Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heterskedacity ”, *Econometrica*, 48, pp. 817-38

Almanach financier 1870, *Guide des rentiers et capitalistes*, p. 53, Aux bureaux du Journal Financier, PARIS, 1871(et tous les relevés des données publiées année après année)

*Manuel statistique des principales valeurs négociées à la bourse de Paris*, (1854), 178 p., Vinchon, Paris, Cote B.N. : V-45893